

Systemes séquentiels synchrones

- Chronogramme
- Graphe des états
- Table d'états

andre.stauffer@epfl.ch

Schéma logique

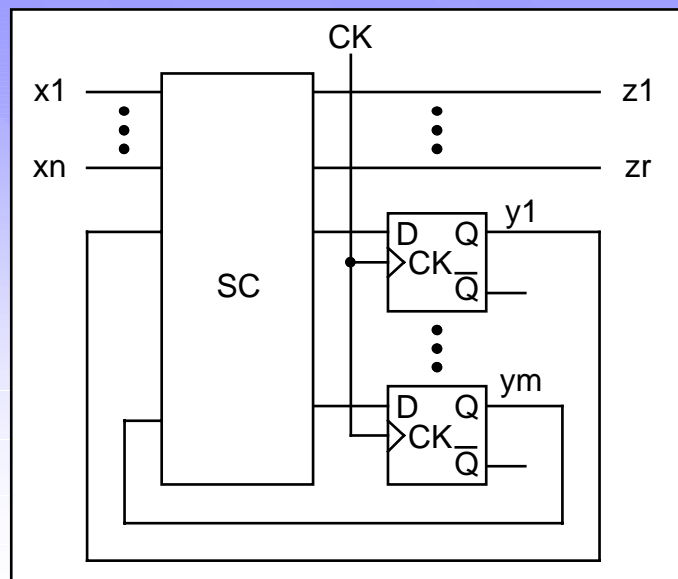


Schéma logique

Un système séquentiel synchrone se compose d'un ensemble de bascules bistables attaquées par le signal d'horloge CK et d'un système combinatoire SC

Les variables x_1, \dots, x_n sont les variables d'entrée ou primaires
Les variables y_1, \dots, y_m sont les variables internes ou secondaires
Les variables z_1, \dots, z_r sont les variables de sortie

Les variables internes, mémorisées dans les bascules, définissent l'état présent (y_1, \dots, y_n) du système séquentiel

Le système combinatoire calcule l'état futur (y_1+, \dots, y_m+) et l'état de sortie (z_1, \dots, z_r) du système séquentiel à partir de l'état total ($x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$)

Analyse

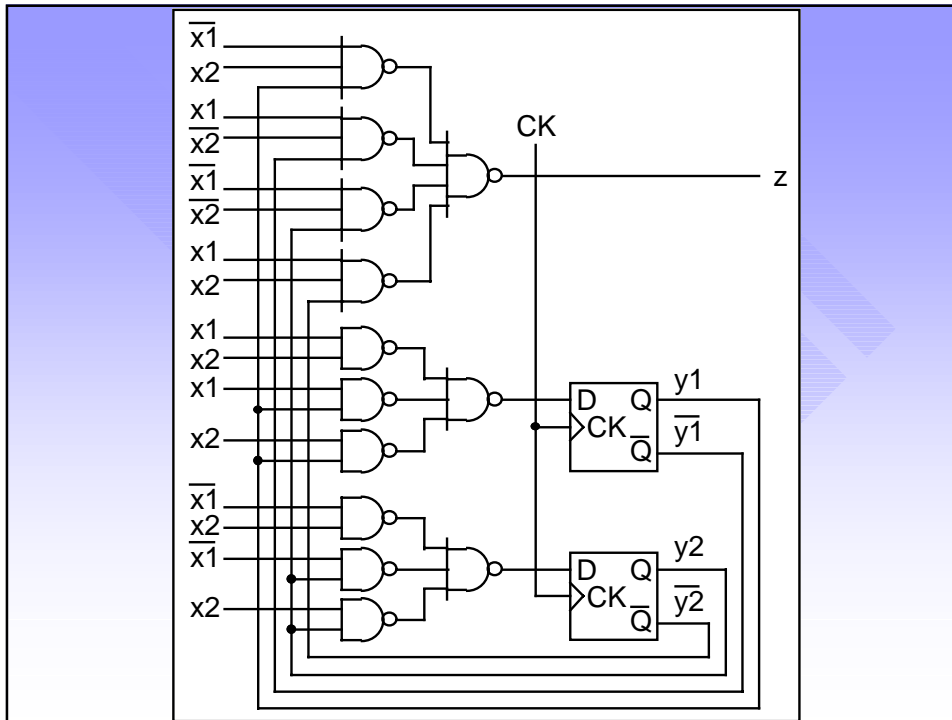
Le but de l'analyse est la détermination des modes de représentation d'un système à partir de son schéma logique

Les modes de représentation d'un système séquentiel sont:

- la table d'états
- le graphe des états
- le chronogramme

La méthode consiste à partir du schéma logique du système combinatoire pour:

- déterminer les équations des variables de sortie z en fonction des variables d'entrée x et des variables internes y
- déterminer les équations des variables d'excitation des bascules en fonction des variables d'entrée x et des variables internes y



Analyse

Les équations du système combinatoire s'écrivent:

$$z = x1'x2y1 + x1x2'y1' + x1'x2'y2 + x1x2y2'$$

$$D1 = x1x2 + x1y1 + x2y1 = \text{MAJ}(x1,x2,y1)$$

$$D2 = x1'x2 + x1'y2 + x2y2 = \text{MAJ}(x1',x2,y2)$$

L'équation caractéristique de la bascule étant $Q^+=D$, on en déduit les expressions des états futurs:

$$y1^+ = x1x2 + x1y1 + x2y1$$

$$y2^+ = x1'x2 + x1'y2 + x2y2$$

Table d'états

Les états d'entrée définissent les colonnes de la table

Les états internes définissent les lignes de la table

y_1+y_2+z	x_1x_2 00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Table d'états

L'état futur de la première variable interne découle de la relation:

$$y_1^+ = x_1x_2 + x_1y_1 + x_2y_1$$

y_1+y_2+z	x_1x_2 00	01	11	10
00			1	
01			1	
11		1	1	1
10		1	1	1

Table d'états

L'état futur de la seconde variable interne découle de la relation:
 $y_{2+} = x_1'x_2 + x_1'y_2 + x_2y_2$

y_1+y_2+z	x_1x_2			
	00	01	11	10
00	0	01	1	0
01	01	01	11	0
11	01	11	11	1
10	0	11	1	1

y_1y_2

Table d'états

La variable de sortie satisfait la relation:
 $z = x_1'x_2y_1 + x_1x_2'y_1' + x_1'x_2'y_2 + x_1x_2y_2'$

y_1+y_2+z	x_1x_2			
	00	01	11	10
00	00	01	10,1	00,1
01	01,1	01	11	00,1
11	01,1	11,1	11	10
10	00	11,1	10,1	10

y_1y_2

Table d'états

On obtient ainsi la table d'états assignée (ou codée) du système séquentiel dans laquelle on a encadré les états stables

y ₁ y ₂ z	x ₁ x ₂			
	00	01	11	10
00	(00,0)	01,0	10,1	(00,1)
01	(01,1)	(01,0)	11,0	00,1
11	01,1	(11,1)	(11,0)	10,0
10	00,0	11,1	(10,1)	(10,0)

Table d'états

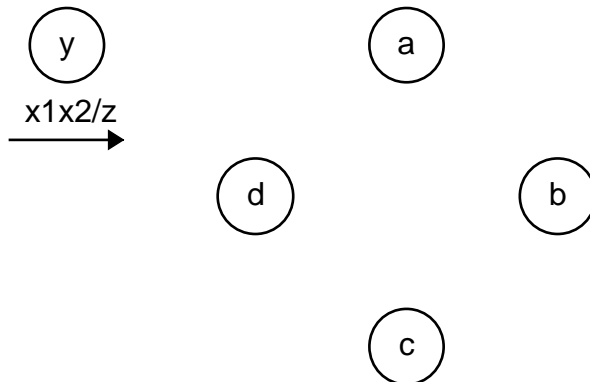
La table d'états non assignée résulte du remplacement des états internes 00, 01, 11 et 10 par a, b, c et d respectivement

y ₁ z	x ₁ x ₂			
	00	01	11	10
a	(a,0)	b,0	d,1	(a,1)
b	(b,1)	(b,0)	c,0	a,1
c	b,1	(c,1)	(c,0)	d,0
d	a,0	c,1	(d,1)	(d,0)

Graphe des états

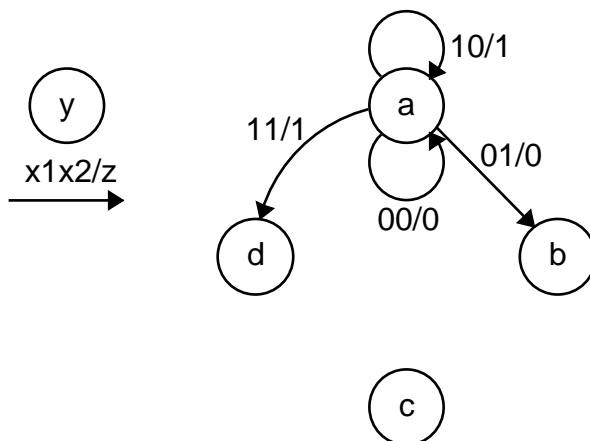
Les états internes définissent les sommets du graphe

Les états d'entrée définissent les flèches quittant les sommets



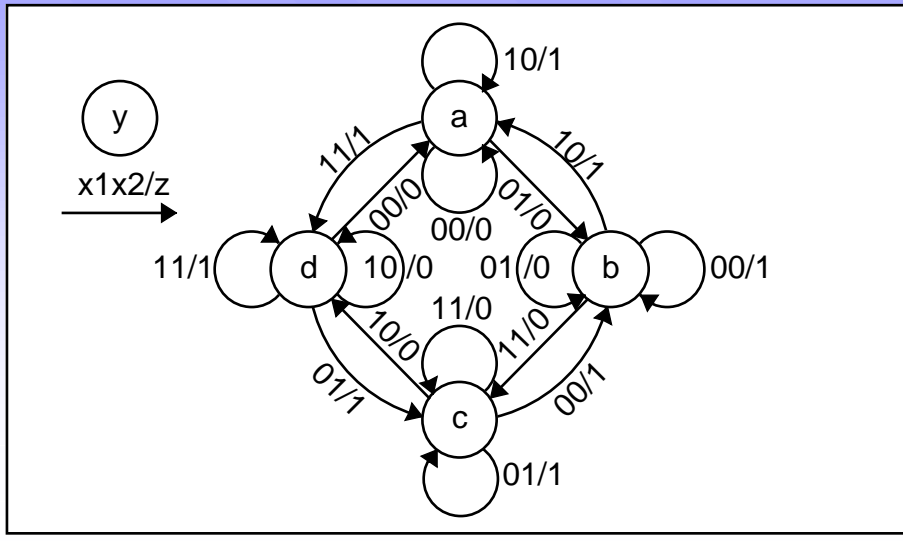
Graphe des états

A partir de chacun des sommets on détermine ainsi quatre flèches qui correspondent aux quatre états d'entrée



Graphe des états

Les états stables correspondent aux flèches qui se rebouclent sur les sommets du graphe



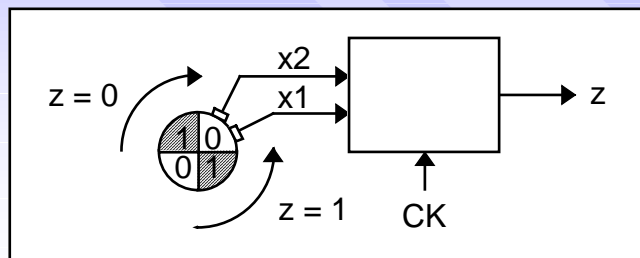
Discriminateur

Le système séquentiel synchrone analysé est un discriminateur du sens de rotation

Il s'agit d'un dispositif à deux variables d'entrée x_1 et x_2 qui indique lorsque $z=0$ (resp. $z=1$) qu'un arbre tourne dans le sens (resp. dans le sens inverse) des aiguilles d'une montre

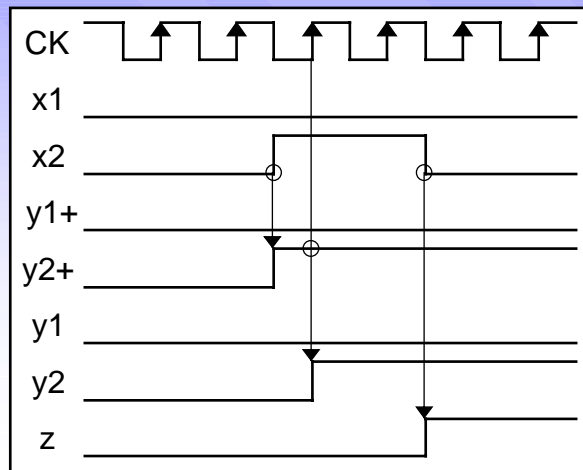
La séquence $x_1x_2 = 00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$ engendre ainsi $z=0$

La séquence $x_1x_2 = 00 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 01 \rightarrow 00$ engendre elle $z=1$



Chronogramme

Le chronogramme est un mode de représentation qui permet de visualiser les variations des variables du système séquentiel
Pour une petite rotation dans le sens des aiguilles d'une montre suivie d'une petite rotation en sens inverse on obtient:



Synthèse

L'objectif de la synthèse est la détermination d'un schéma logique à partir d'un cahier des charges imposé

La synthèse s'effectue en deux étapes:

- la conception
- la réalisation

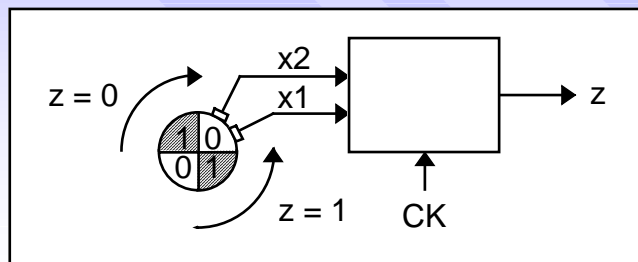
La conception consiste à partir du cahier des charges pour trouver des modes de représentation formels tels que le graphe des états et la table d'états non assignée

La réalisation consiste à coder les états internes de la table puis à calculer les fonctions logiques du système combinatoire avant de dessiner le schéma logique du système séquentiel

Discriminateur

On va effectuer la synthèse du discriminateur du sens de rotation représenté dans le schéma ci-dessous en admettant les hypothèses suivantes:

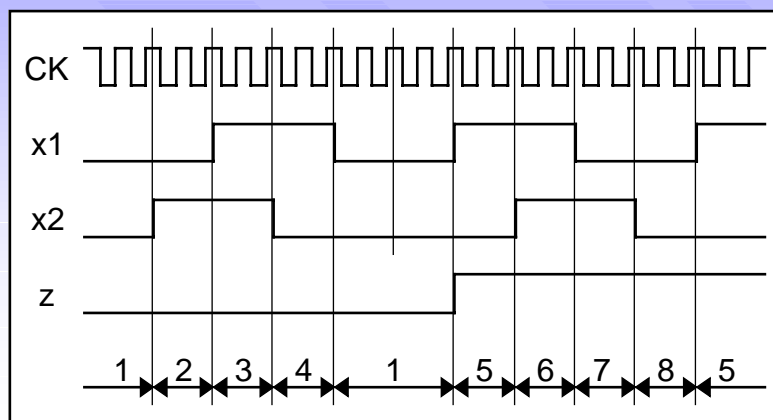
- La fréquence du signal d'horloge CK est plus élevée que celle des signaux d'entrée x1 et x2
- Les signaux d'entrée x1 et x2 ne varient pas simultanément



Chronogramme

On commence par établir un chronogramme qui représente une rotation d'un demi-tour dans le sens des aiguilles d'une montre puis d'un demi-tour dans le sens inverse

On définit ainsi 8 phases caractérisées par un état x1,x2,z

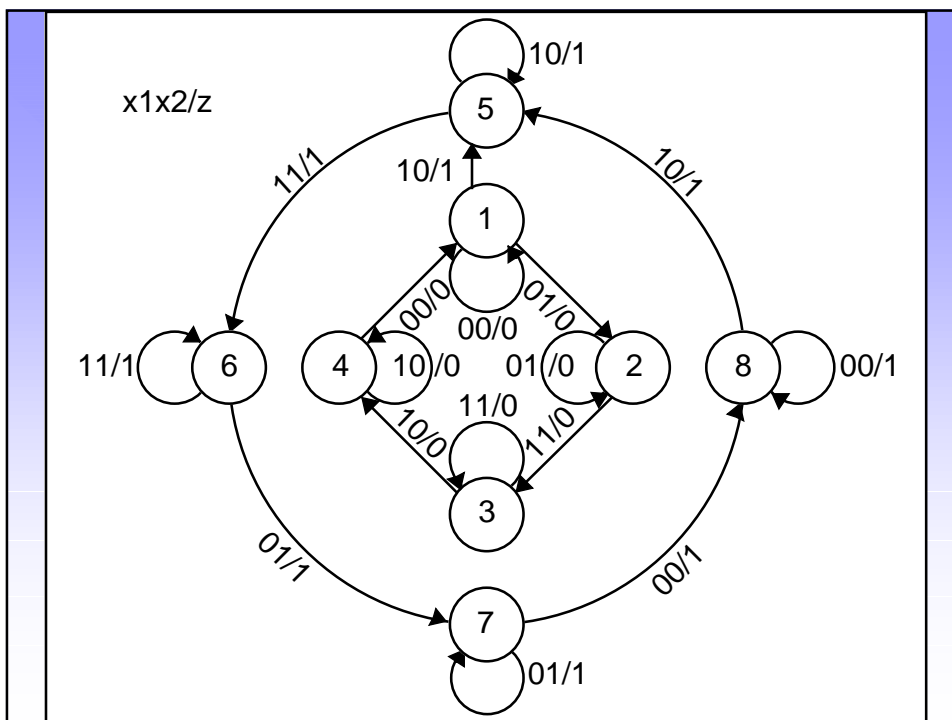


Graphe des états

On associe un sommet du graphe des états à chacune des phases du chronogramme

Comme le chronogramme n'est pas un mode de représentation complet, le graphe des états correspondant est partiel

Pour le compléter, il faut déterminer le comportement du discriminateur en opérant tous les changements de sens de rotation possibles



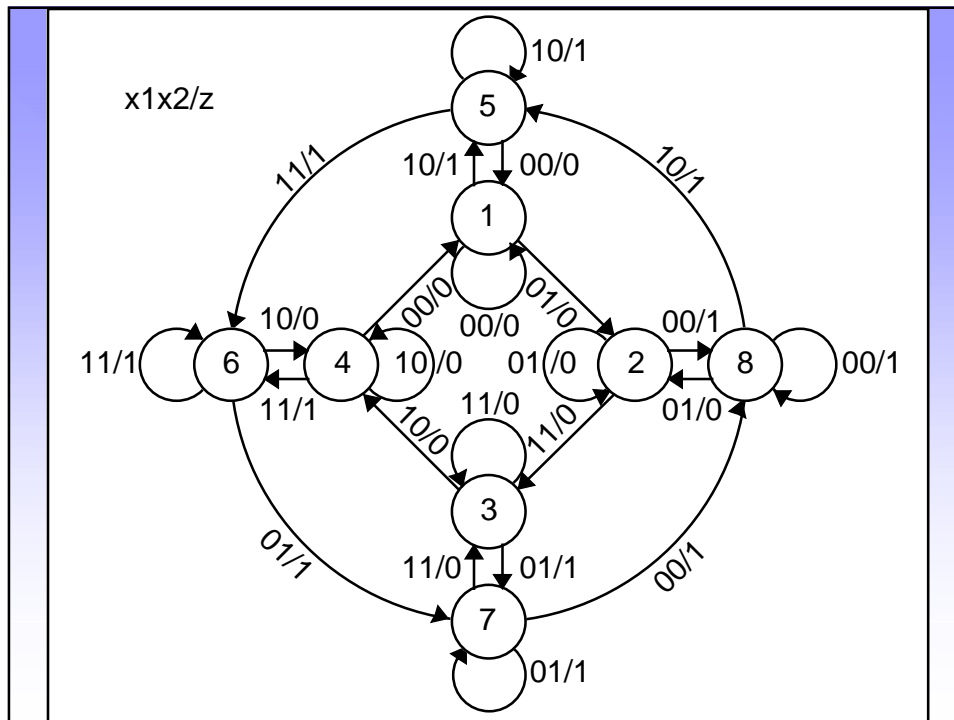


Table d'états

Le discriminateur du sens de rotation est un système dont l'état de sortie z ne dépend pas de la durée des états d'entrée x_1, x_2 mais seulement de leur ordre de succession: il possède un comportement asynchrone

Chacun des sommet d'un tel système comporte une flèche qui se reboucle sur le sommet lui-même

La table d'états fait correspondre une colonne à chacune des combinaisons des variables d'entrée et une ligne à chacun des sommets du graphe

Chacune des lignes de la table comporte un état stable qui correspond à la flèche rebouclée dans le graphe des états

y,z	x1x2			
	00	01	11	10
1	(1,0)	2,0	-	5,1
2	8,1	(2,0)	3,0	-
3	-	7,1	(3,0)	4,0
4	1,0	-	6,1	(4,0)
5	1,0	-	6,1	(5,1)
6	-	7,1	(6,1)	4,0
7	8,1	(7,1)	3,0	-
8	(8,1)	2,0	-	5,1
y				

Table d'états

La recherche d'une table d'états comportant un plus petit nombre de lignes est appelée réduction

Cette opération se justifie car elle entraîne généralement une diminution du nombre de variables nécessaires au codage des états internes

Lorsque deux lignes présentent des états y+,z identiques dans chacune des colonnes de la table, on peut les fusionner en une seule ligne

Dans l'exemple du discriminateur, c'est le cas des lignes 1 et 5, 2 et 8, 3 et 7, 4 et 6.

Table d'états

La table d'états réduite termine l'étape de conception de la synthèse du discriminateur du sens de rotation

y+,z	x1x2 00	01	11	10
1,5 = a	(a,0)	b,0	d,1	(a,1)
2,8 = b	(b,1)	(b,0)	c,0	a,1
3,7 = c	b,1	(c,1)	(c,0)	d,0
4,6 = d	a,0	c,1	(d,1)	(d,0)
y				

Table d'états

L'étape de réalisation commence par le codage des états internes
 Pour un codage minimal on recourt à deux variables y1 et y2

y1+y2+,z	x1x2 00	01	11	10
a = 11	(11,0)	10,0	01,1	(11,1)
b = 10	(10,1)	(10,0)	00,0	11,1
c = 00	10,1	(00,1)	(00,0)	01,0
d = 01	11,0	00,1	(01,1)	(01,0)
y1y2				

Réalisation

La simplification de la variable interne $y1+$ détermine $D1$:

$$D1 = y1+ = x1'x2' + x1'y1 + x2'y1$$

$y1+$		$x1$			
		1	0	0	0
$y1$	1	1	0	1	
	1	1	0	1	
	$x2$				
	1	0	0	0	

Réalisation

La simplification de la variable interne $y2+$ détermine $D2$:

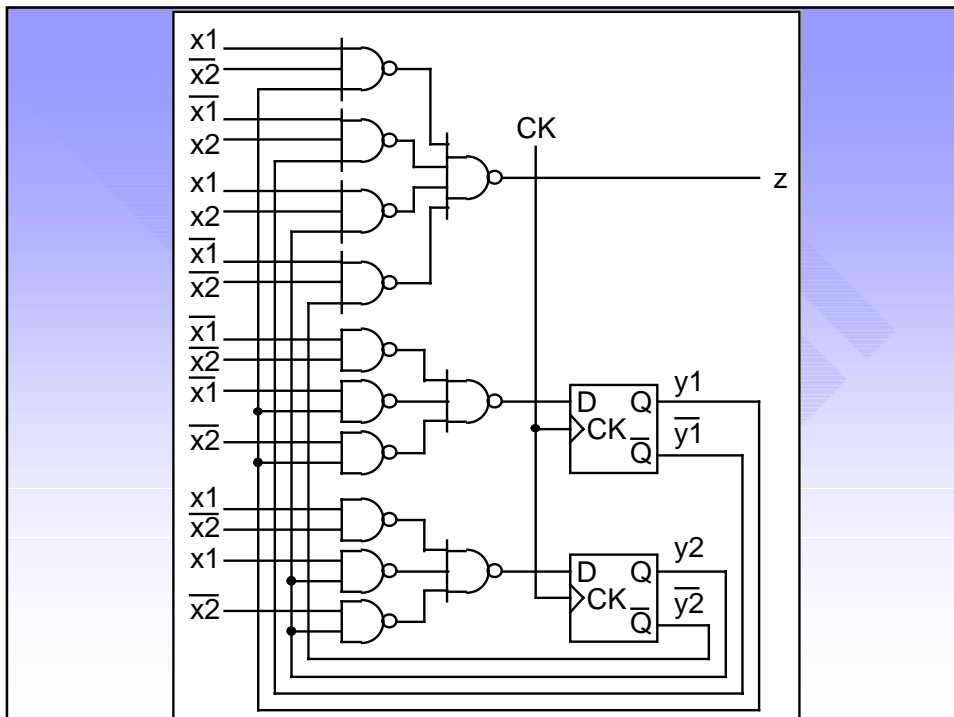
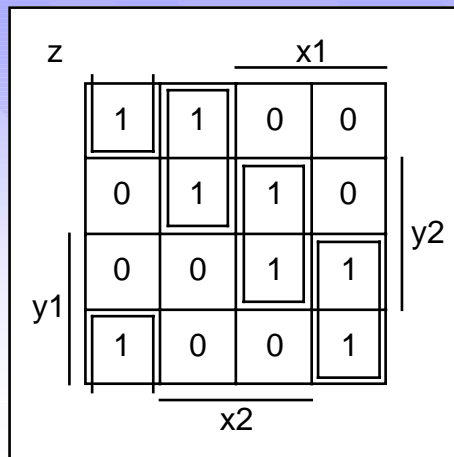
$$D2 = y2+ = x1x2' + x1y2 + x2'y2$$

$y2+$		$x1$			
		0	0	0	1
$y1$	1	0	1	1	
	1	0	1	1	
	$x2$				
	0	0	0	1	

Réalisation

La simplification de la variable de sortie z conduit à l'expression:

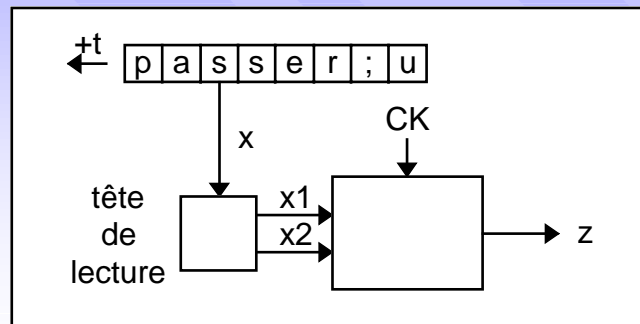
$$z = x1'x2'y2' + x1'x2y1' + x1x2'y1 + x1x2y2$$



Détecteur de séquence

On va effectuer la synthèse d'un détecteur de séquence capable de reconnaître les mots qui se terminent par er

Le système séquentiel comporte une tête de lecture qui lit à chaque instant d'horloge un nouveau caractère



Détecteur de séquence

La sortie z prend la valeur 1 dans l'instant d'horloge qui suit immédiatement la détection d'un mot qui se termine par er

Les caractères x appartiennent à quatre catégories:

- la lettre e
- la lettre r
- les autres lettres de l'alphabet (tiret compris)
- les signes de ponctuation (espace blanc compris)

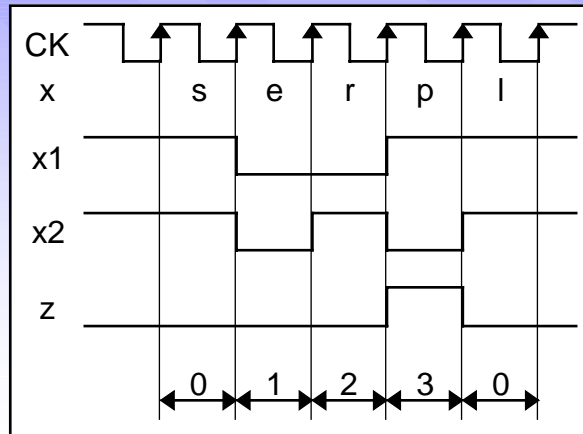
On les code à l'aide des deux variables x1 et x2

x	x1	x2
e	0	0
r	0	1
l	1	1
p	1	0

Chronogramme

On commence par établir un chronogramme qui illustre la détection d'une séquence e -> r -> p

On définit ainsi 4 phases caractérisées par un état x1,x2,z



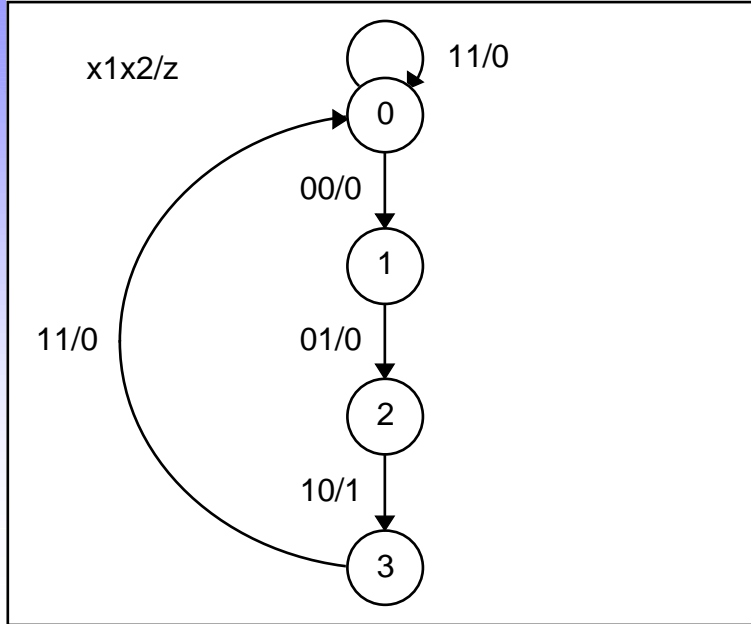
Graphe des états

On remarque dans le chronogramme du détecteur que l'état de sortie z dépend à la fois de la durée des états d'entrée x1,x2 et de leur ordre de succession: il possède un comportement synchrone

Le graphe des états qui associe un sommet à chacune des phases du chronogramme n'aura par conséquent pas nécessairement une flèche rebouclée sur chacun des sommets comme c'était le cas pour le discriminateur du sens de rotation

Il s'agira aussi de compléter le graphe en envisageant toutes les séquences de caractères possibles

Graphe des états



Graphe des états

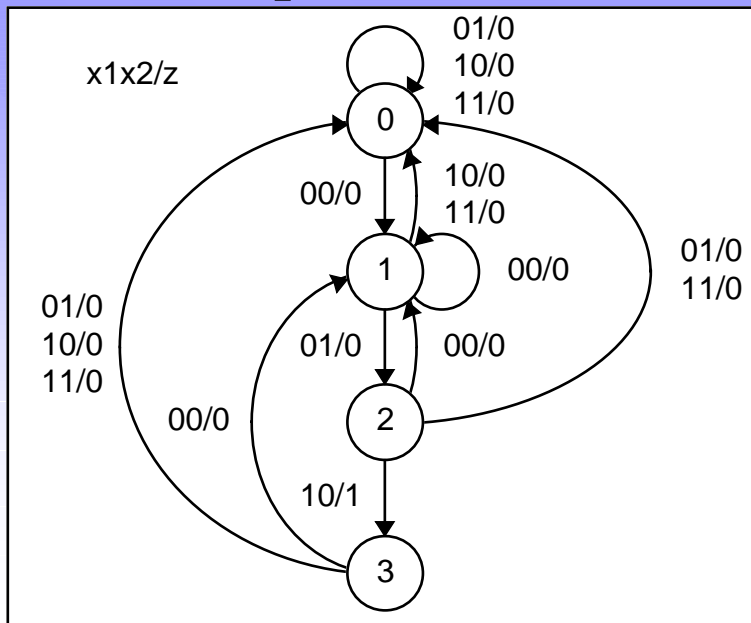


Table d'états

La table d'états associe une ligne à chacun des sommets du graphe des états

y+,z	x1x2			
	00	01	11	10
0	1,0	0,0	0,0	0,0
1	1,0	2,0	0,0	0,0
2	1,0	0,0	0,0	3,1
3	1,0	0,0	0,0	0,0
y				

Table d'états

La table d'états réduite fusionne les lignes 0 et 3 dans la ligne 0 et termine l'étape de conception

y+,z	x1x2			
	00	01	11	10
0	1,0	0,0	0,0	0,0
1	1,0	2,0	0,0	0,0
2	1,0	0,0	0,0	0,1
y				

Graphe des états

Le graphe des états correspondant à la table d'états réduite ne comporte plus que trois sommets

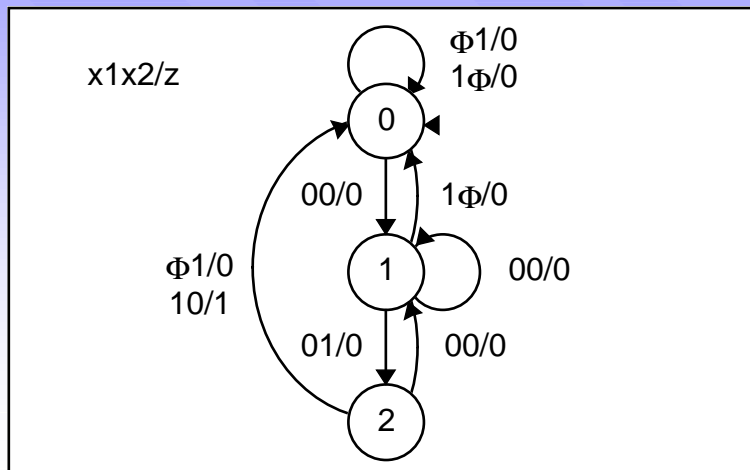


Table d'états

L'étape de réalisation commence par le codage des états internes
 Pour un codage minimal on recourt à deux variables y_1 et y_2

y_1+y_2+z	x_1x_2			
	00	01	11	10
0 = 00	01,0	00,0	00,0	00,0
1 = 01	01,0	11,0	00,0	00,0
2 = 11	01,0	00,0	00,0	00,1
10	-	-	-	-
y_1y_2				

Réalisation

La simplification de la variable interne $y1+$ détermine $D1$:

$$D1 = y1+ = x1'x2y1'y2$$

$y1+$		$x1$			
		0	0	0	0
$y1$	0	1	0	0	
	0	0	0	0	
	Φ	Φ	Φ	Φ	
	$x2$				

Réalisation

La simplification de la variable interne $y1+$ détermine $D1$:

$$D2 = y2+ = x1'x2' + x1'y1'y2$$

$y2+$		$x1$			
		1	0	0	0
$y1$	1	1	0	0	
	1	0	0	0	
	Φ	Φ	Φ	Φ	
	$x2$				

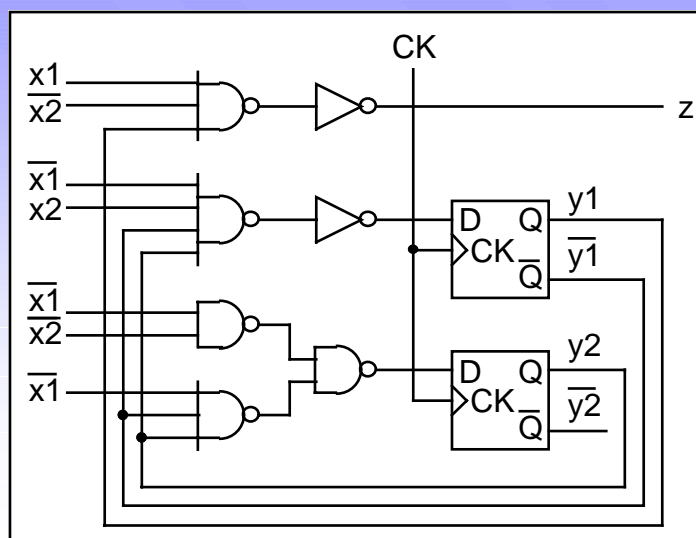
Réalisation

La simplification de la variable de sortie z conduit à l'expression:
 $z = x_1x_2'y_1$

z	x1			
	0	0	0	0
y1	0	0	0	0
	0	0	0	1
	Φ	Φ	Φ	Φ
	x2			
	y2			

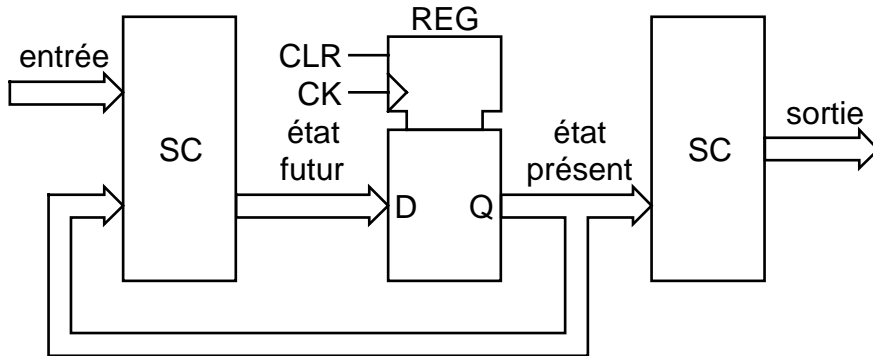
Réalisation

Les équations simplifiées conduisent au schéma logique {NAND, bascule D} du détecteur de séquence



Structure

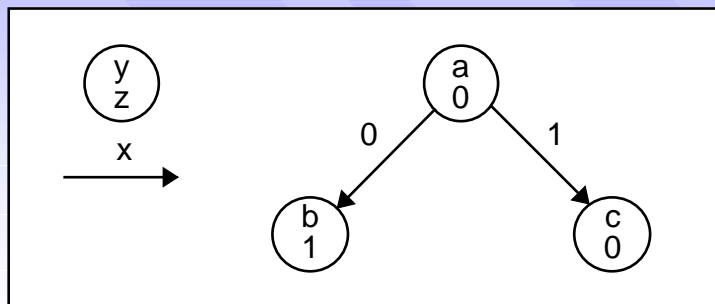
Le système séquentiel synchrone dont les variables de sortie ne dépendent que de l'état présent est appelé machine de Moore



Structure

Dans le graphe des états de la machine de Moore:

- chaque sommet correspond à un état présent y
- chaque flèche correspond à un état d'entrée x et pointe vers un état futur y+
- l'état de sortie z est indiqué dans les sommets



Structure

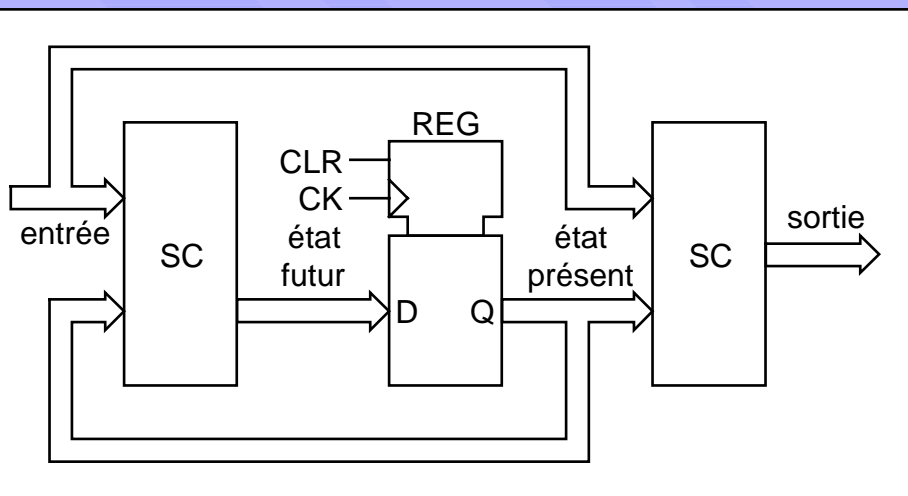
Dans la table d'états de la machine de Moore:

- chaque ligne correspond à un état présent y
- chaque colonne correspond à un état d'entrée x
- l'état futur y_+ est indiqué dans les cases x,y
- l'état de sortie z est indiqué dans une colonne supplémentaire

y_+	x		z
	0	1	
a	b	c	0
y			

Structure

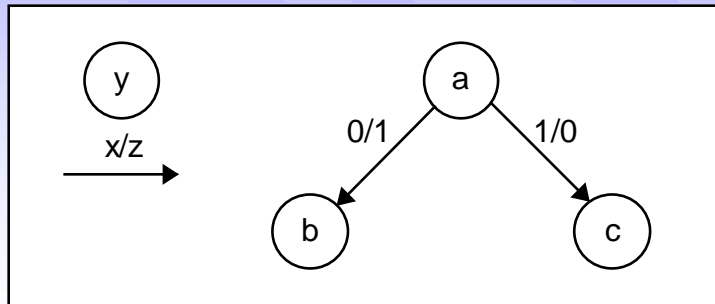
Le système séquentiel synchrone dont les variables de sortie dépendent des variables d'entrée et de l'état présent est appelé machine de Mealy



Structure

Dans le graphe des états de la machine de Mealy:

- chaque sommet correspond à un état présent y
- chaque flèche correspond à un état d'entrée x et pointe vers un état futur $y+$
- l'état de sortie z est indiqué sur les flèches



Structure

Dans la table d'états de la machine de Mealy:

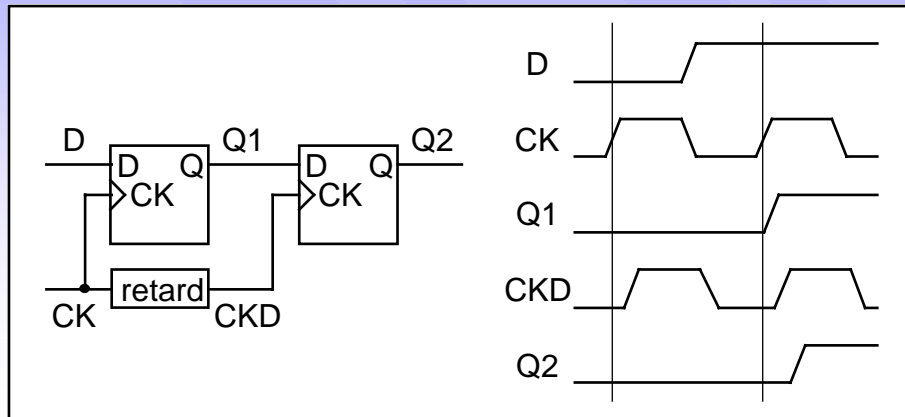
- chaque ligne correspond à un état présent y
- chaque colonne correspond à un état d'entrée x
- l'état futur $y+$ et l'état de sortie z sont indiqués dans les cases x,y

$y+,z$	x 0	1
a y	b,1	c,0

Fonctionnement

Un système séquentiel synchrone ne fonctionne correctement que si l'ensemble de ses bascules reçoit le signal d'horloge CK en même temps

Dans le cas contraire on parle de retard d'horloge (en anglais: clock skew) et le fonctionnement peut se trouver modifié



Fonctionnement

Un système séquentiel synchrone dont les entrées sont asynchrones ne fonctionne à coup sûr correctement que si le codage des états internes est adjacent: les états présents y et futurs $y+$ ne peuvent différer que d'une variable interne

y_1+y_2+z	x_1x_2			
	00	01	11	10
00	(00,0)	01,0	10,1	(00,1)
01	(01,1)	(01,0)	11,0	00,1
11	01,1	(11,1)	(11,0)	10,0
10	00,0	11,1	(10,1)	(10,0)
y_1y_2				

Fonctionnement

Un système séquentiel synchrone dont les entrées sont synchrones fonctionne correctement quel que soit le codage des états internes

Pour synchroniser une variable d'entrée x , il suffit d'insérer une bascule bistable pour échantillonner l'entrée asynchrone

